Лекция 5 Уравнения для вихря скорости и дивергенции. Постановка задачи прогноза атмосферных движений.

Цель: Показать вывод уравнений для вихря скорости и дивергенции, преимущества полученных уравнений.

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Вихрь скорости представляет собой следующий вектор $\Omega = rotU$, а их проекции на оси координат записываются следующим образом:

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial y_p}$$

Уравнение вихря скорости получается применением оператора rot к уравнению для скорости движения

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} grad\ p - 2w \times U + g$$

$$\frac{d}{dt}\Omega - (\Omega \times \nabla)U + \Omega divU = -2rot(w \times U) - \frac{1}{\rho\, T}\nabla T \times \nabla p \qquad (7.1)$$

Чтобы получить уравнение для вертикальных компонент вихря скорости, необходимо дифференцировать уравнение движения.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial p}=g\frac{\partial u}{\partial x}+lv$$ по y

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial p}=-g\frac{\partial u}{\partial y}-lu$$ по x

Если мы вычтем первое уравнение из второго и сделаем некоторые преобразования, мы получим следующее выражение:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+u\frac{\partial \Omega}{\partial x}+v\frac{\partial \Omega}{\partial y}+\frac{\partial \Omega}{\partial p}+\frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}=-(\Omega+l)(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})-u\frac{\partial l}{\partial x}-v\frac{\partial l}{\partial y} \qquad (7.2)$$

Оставляя в уравнении члены с большими значениями, получаем следующее упрощенное уравнение скорости вихря:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+u\frac{\partial\Omega}{\partial x}+v\frac{\partial\Omega}{\partial y}=-l(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})-u\frac{\partial l}{\partial x}-v\frac{\partial l}{\partial y}$$ или

Если мы запишем это уравнение в векторной форме:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+V*\nabla(\Omega+l)=-l\,\nabla*V$$

Уравнение для дивергенции скорости.

Как известно, дивергенция скорости определяется по следующей формуле:

Д=divU= $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$

Уравнение для дивергенции скорости.

На основе уравнения неразрывности:

$$Д = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{\partial t}$$

Рассмотрим уравнение для горизонтальной дивергенции скорости в изобарической системе координат,

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Для этого, используя метод получения уравнения вихря скорости, т.е. дифференцируя уравнение движения по x и y и складывая все это, мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + u\frac{\partial D}{\partial x} + v\frac{\partial D}{\partial y} + \tau\frac{\partial D}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial p} - l\Omega + u\frac{\partial l}{\partial y} - v\frac{\partial l}{\partial x} = -\rho\,\Delta H \quad (7.5)$$

Все три вида атмосферных движений — макро-, мезо- и микромасштабные движения — безусловно оказываются взаимосвязанными. Однако с точки зрения прогноза погоды нас в первую очередь будут интересовать крупномасштабные, а во вторую — среднемасштабные движения.

Так как макро- и мезомасштабные движения существенно различаются по ряду характеристик, то для их рассмотрения и прогноза должны быть получены специальные отличные друг от друга системы уравнений. Эти системы могут быть решены независимо.

При этом предполагается, что при рассмотрении и прогнозе крупномасштабных движений учет мезо- и микромасштабных движений может быть осуществлен приближенно в виде поправок к решению системы уравнений для крупномасштабных движений. При этом влияние микромасштабных движений учитывается суммарно, без рассмотрения конкретных турбулентных пульсаций.

При прогнозе же мезомасштабных явлений учет крупномасштабных процессов может быть осуществлен параметрически, путем задания характеристик крупномасштабных движений вне области мезомасштабного воздействия.

Будем рассматривать атмосферу, состоящую из двух частей: планетарного пограничного слоя (нижние 600—1000 м), в котором сила турбулентной вязкости и сила Кориолиса имеют одинаковый порядок, и всей остальной части атмосферы (свободная атмосфера), где влияние вязкости мало. Ввиду сравнительно малой толщины пограничного слоя будем вначале решать задачу прогноза без его учета. При этом пограничный слой как бы «стягивается в пленку», не имеющую толщины. В решение, полученное при таких условиях, потом может быть введена поправка на влияние пограничного слоя.

В качестве исходной возьмем систему полных уравнений гидротермодинамики (6.3)—(6.7) в изобарической системе координат:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\tau\frac{\partial u}{\partial p}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+lv;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\tau\frac{\partial v}{\partial p}=-g\frac{\partial H}{\partial y}-lu;$$

$$T=-\frac{g}{R}p\frac{\partial H}{\partial p};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial p}=0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{c^2}{Rp}\tau+\frac{1}{c_p\rho}\varepsilon, \qquad (10.1)$$

где

$$c^2=\frac{R^2T\,(\gamma_a-\gamma)}{g} \tag{10.2}$$

— некоторый параметр, называемый параметром статической устойчивости и считающийся известным. Рассмотрим случай, когда ε задано (в частности, $\varepsilon=0$). В этом случае система пяти уравнений содержит пять неизвестных: u, v, τ, T и H. Так как она имеет три производных по времени, то для ее решения необходимо задание в начальный момент трех функций. В качестве таковых можно задать, например, u, v и H. В таком случае две остальные функции, т. е. T и τ определяются по данным первых трех с помощью уравнения статики и уравнения неразрывности, не содержащих производных по времени. Таким образом, мы полагаем, что

$$\text{при } t=0 \quad u=u_0(x,\ y,\ p);\quad v=v_0(x,\ y,\ p);$$
$$H=H_0(x,\ y,\ p). \tag{10.3}$$

Можно, однако, в качестве начальной задать не H, а T. В этом случае, кроме того, потребуется задать давление на уровне моря.

Для решения данной системы уравнений, кроме начальных, необходимо задать граничные условия. Исходя из того, что в принципе область решения данной задачи может охватывать поверхность всего земного шара, ограничимся рассмотрением краевых условий по вертикали. Так как система уравнений содержит две производные по вертикальной координате p, то необходимо задать два краевых условия.

В качестве одного из таких условий принимается непроникновение масс воздуха сквозь земную поверхность, что означает равенство нулю вертикальной скорости w при $z=0$. В изобарической системе координат это условие, согласно (6.2), имеет вид

$$\text{при } p=P \quad \tau=\tau_1=g\rho_1\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right), \qquad (10.4)$$

где $P=1000$ мбар, ρ_1 — средняя плотность воздуха у поверхности земли.

В качестве второго краевого условия привлекается условие сохранения массы атмосферы. Это означает, что на верхней границе атмосферы $\rho w \to 0$. В изобарической системе координат при дополнительном предположении, что u и v ограничены, это условие имеет вид

$$\text{при } p \to 0 \quad \tau = \tau_0 \to 0. \tag{10.6}$$

Система уравнений (10.1) и краевые условия (10.4)—(10.6) или (10.7) и (10.8) представляют собой замкнутую систему и вместе с начальными данными (10.3) служат основой численных методов прогноза крупномасштабных движений и погоды.

В частном случае указанная система уравнений может быть существенно упрощена. Это случай баротропной атмосферы, в которой, как уже говорилось, давление есть функция одной плотности или температуры. В такой атмосфере при $p=\text{const}$ будет и $T=\text{const}$, а изобары и изостеры, а значит, и изотермы параллельны. Из этого следует, что направление (но не скорость) геострофического ветра с высотой не изменяется. Из сказанного следует, что в данной модели атмосферы на любой изобарической поверхности изменения температуры во времени и вдоль изобарической поверхности отсутствуют. Следовательно, можно записать

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=0$$

или после замены температуры через высоты изобарических поверхностей с помощью уравнения статики

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial y}=0.$$

Поставим еще более жесткое условие. Положим, что направление и скорость действительного ветра с высотой остаются неизменными. Тогда, интегрируя приведенное соотношение по давлению от p до P и учитывая, что по условию скорость и направление ветра с высотой не изменяются, получаем

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Big|_p-\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Big|_P=0.$$

В соответствии с краевым условием (10.4), второе слагаемое последнего соотношения равно $\tau_1/\rho_1 g=RT_1\tau_1/gP$, где T_1 — значение T при $p=P$.

Тогда мы можем записать

$$\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{RT_1}{gP}\tau_1=0.$$

Проинтегрировав уравнение неразрывности по давлению от p до P, учитывая неизменность ветра с высотой и краевые условия (10.6), получаем

$$\tau_1 = -\int_0^P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dp = -P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Подставляя это выражение в предыдущее соотношение, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y} + q\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \qquad (10.9)$$

где $q = \widetilde{c}^2/g$, $\widetilde{c} = \sqrt{RT_1} = \sqrt{287 \cdot 300} \approx 290$ м/с — параметр, близкий к скорости звука.

Полученное соотношение совместно с двумя уравнениями движения системы (10.1), которые в баротропном случае и при сделанных предположениях справедливы для любого уровня, образуют замкнутую систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+lv;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial y}-lu;$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}+q\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \qquad (10.10)$$

Это полная система уравнений гидродинамики для баротропной атмосферы. Она может быть применена к любому уровню. Однако практика показала, что наилучшие результаты она дает применительно к средней части атмосферы (изобарическая поверхность 500 мбар).

Рассмотрим

частный случай баротропности — однородную несжимаемую атмосферу ($\rho = \text{const}$), ограниченную сверху свободной поверхностью $h(x, y, t)$. По-прежнему будем считать, что ветер не изменяется с высотой. Интегрируя уравнение неразрывности для несжимаемой атмосферы

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

по высоте z от 0 до h и учитывая, что при $z=0$ $w=0$, а также неизменность ветра с высотой, получаем

$$w_h = -\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

где w_h — вертикальная скорость перемещения свободной поверхности.

Для свободной поверхности справедливо соотношение $dh/dt = 0$, выражающее тот факт, что частицы жидкости при своем движении не проникают через эту поверхность, а перемещаются вдоль нее, т. е. поверхность как бы всегда состоит из одной и той же совокупности частиц. Из этого соотношения следует, что для свободной поверхности

$$w_h = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Подставляя сюда полученное только что выражение для w_h, получаем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \qquad (10.11)$$

Для однородной атмосферы $p = g\rho(h - z)$, следовательно,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g\frac{\partial h}{\partial x}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = g\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения движения и учитывая условие неизменности ветра с высотой ($\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$), получим два упрощенных уравнения движения. Объединяя эти два уравнения с уравнением (10.11), получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial x} + lv;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial y} - lu;$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \qquad (10.12)$$

Легко видеть, что полученная система уравнений аналогична системе (10.10). Различие же между ними состоит в том, что уравнения (10.10) записаны в изобарической, а (10.12) — в декартовой системах координат.

Трудности решения системы

обусловлены в первую очередь нелинейностью уравнений. Существенные трудности связаны также с тем, что рассматриваемые системы уравнений описывают не только медленные крупномасштабные процессы, но и быстрые волны, имеющие скорость, соизмеримую со скоростью звука. Но скорость перемещения волн, описываемых уравнениями, в значительной мере предопределяет требования к способам решения этих уравнений: при больших скоростях оказываются пригодными лишь более точные схемы решения специального вида. Так, например, допустимый шаг по времени при численном решении задачи оказывается тем меньше, чем больше скорость волн. В частности, при скоростях волн, соизмеримых со скоростью звука, он не должен превышать 15 мин, т. е. интервала времени на два порядка меньшего, чем характерное время круп-

масштабных атмосферных движений, что влечет за собой дополнительные трудности.

В связи с этим, прежде чем перейти к решению прогностических задач, рассмотрим вопрос о волновых движениях в атмосфере.

Вопросы для самоконтроля:

1. Напишите определение вихря скорости;
2. выведите уравнение вихря;
3. Получите уравнение горизонтальной дивергенции;
4. Полная постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений
5. Модель баротропной атмосферы